Ein kleines bißchen mittelalterliche Zahlentheorie

ausgewählt aus dem, was aus der Antike herübergerettet wurde

I) Die fünf Genera (Klassen) der Proportionen

allgemein: Nenner = alter Wert, Zähler = neuer Wert,

$\frac{2}{1}$ entspricht also einer Halbierung der Dauern (2 anstelle von 1).

1. genus multiplex, vielfache Art: $\frac{n}{1}$

z.B.: proportio dupla, doppelt $\frac{2}{1}$, proportio tripla, dreifach $\frac{3}{1}$

2. genus superparticulare, überteilige Art: $\frac{n+1}{n}$

z.B.: proportio sesquialtera, eineinhalb $\frac{3}{2}$,

proportio sesquitertia, eineindrittel $\frac{4}{3}$,

proportio sesquiquarta, eineinviertel $\frac{5}{4}$

3. genus superpartiens, überteilende Art: $\frac{n+k}{n}$ (1<k<n)

z.B.: proportio superbipartiente tertias, zweimal $\frac{1}{3}$ überteilend $\frac{5}{3}$, ($\frac{3+2}{3}$)

proportio supertripartiente quintas, dreimal $\frac{1}{5}$ überteilend $\frac{8}{5}$, ($\frac{5+3}{5}$)

4. genus multiplex superparticulare, vielfach überteilige Art: $\frac{mn+1}{n}$

z.B.: proportio tripla sesquitertia, dreieindrittel $\frac{10}{3}$, ($\frac{3\cdot3+1}{3}$),

proportio quatrupla sesquiquinta, viereinfünftel $\frac{21}{5}$, ($\frac{5\cdot4+1}{5}$)

5. genus multiplex superpartiens, vielfach überteilende Art: $\frac{mn+k}{n}$ (1<k<n)

z.B.: proportia dupla supertripartiente quartas,

doppelt $\frac{1}{4}$ dreimal überteilend $\frac{11}{4}$, ($\frac{2\cdot4+3}{4}$)

Durch Voranstellen der Vorsilbe sub- erhält man die jeweils umgekehrte Proportion, subdupla $\frac{1}{2}$, subsesquialtera $\frac{2}{3}$ etc., dadurch verdoppelt sich die Anzahl der Klassen auf 10 (und damit auf die Lieblingszahl mittelalterlicher Theorie)

II) Die Figurenzahlen

a) Linearzahlen

II III IIII IIIII IIIIII etc.
entspricht der Reihe der natürlichen Zahlen ab 2 (die 1, unitas, gehört, als Grundeinheit, nicht dazu)

b) Flächenzahlen

Dreieckzahlen:
1 3 6 10 15 21 28 36 45 55 etc. (1, +2, +3, +4, +5, etc. Differenz 1)

Viereckzahlen (Quadratzahlen):
1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 etc. (1, +3, +5, +7, +9, etc. Differenz 2)

Fünfeckzahlen:
1 5 12 22 35 51 70 92 117 145 etc. (1, +4, +7, +10, +13, +16. etc. Differenz 3)

Eine Tabelle, um die Zusammenhänge deutlich zu machen:

Dreiecke:	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
Vierecke:	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
Fünfecke:	1	5	12	22	35	51	70	92	117	145
Sechsecke:	1	6	15	28	45	66	91	120	153	190
Siebenecke	1	7	18	34	55	81	112	148	189	235

Entsprechend dem Sachverhalt, daß man
durch hinzufügen eines Dreiecks zu einem
Viereck, ein Fünfeck
durch hinzufügen eines Dreiecks zu einem
Fünfeck, ein Sechseck
durch hinzufügen eines Dreiecks zu einem
Sechseck, ein Siebeneck
erhält,
gilt, daß z.B. eine Fünfeckzahl die Summe der in der Tabelle darüberstehenden Viereckzahl und der in der Tabelle davorstehenden Dreieckszahl ist, analog gilt das für die Sechseckzahlen etc.

c) Körperzahlen

Pyramide über einem Dreieck (Addition der Dreieckzahlen):
1, 1+3, 1+3+6, 1+3+6+10, etc.
1 4 10 20 35 56 etc.

Pyramide über einem Quadrat (Addition der Viereckzahlen):
1, 1+4, 1+4+9, 1+4+9+16, etc.
1 5 14 30 55 91 etc.

Würfel (Kubikzahlen): 1 8 27 64 125 216 343 512 etc.
Diese sind auch Summen der ungeraden Zahlen:
1, 3+5, 7+9+11, 13+15+17+19, 21+23+25+27+29, etc.

Körper mit verschiedenen Seiten werden unterschieden in:
Ziegel: $a \cdot a \cdot b$ ($b < a$)
Stangen: $a \cdot a \cdot b$ ($b > a$)
Keile: $a \cdot b \cdot c$
dabei bilden, wie bei den Proportionen diejenigen, bei denen a b und c um je 1 Einheit verschieden ist eine eigene Klasse (longilateri).

Zwei grundlegende Zahlenreihen

1. aus der 1, dem Prinzip der Unteilbarkeit, der ersten ungeraden Zahl, ensteht, als Addition der ungeraden Zahlen, die Reihe der Quadratzahlen:
1, 1+3, 1+3+5, 1+3+5+7, etc.
1 4 9 16 25 36 etc.
und
2. aus der 2, dem Prinzip der Veränderbarkeit, der ersten geraden Zahl, entsteht, als Addition der geraden Zahlen die Reihe der numeri longilateri:
2, 2+4, 2+4+6, 2+4+6+8, etc
2 6 12 20 30 42 etc.
d.h., man erhält diese Reihe auch durch Addition der Reihe der Quadratzahlen mit der Reihe der natürliche Zahlen:
1+1, 4+2, 9+3, 16+4, etc.

und mischt man die beiden Reihen in aufsteigender Ordnung miteinander:
1 2 4 6 9 12 16 20 etc.
und addiert benachbarte Paare:
1+2, 2+4, 4+6, 6+9, 9+12 etc
erhält man die Dreieckzahlen:
1 3 6 10 15 21 etc.

Vergleicht man diese beiden Reihen miteinander:

1	4	9	16	25	36	49	64
2	6	12	20	30	42	56	72

so ergeben sich die Verhältnisse:
1:2 (duplex), 4:6 (sesquialter), 9:12 (sesquitertius), 16:20 (sesquiquartus), etc.

verschiebt man die Reihe der Quadratzahlen um eine Stelle nach links:

1	4	9	16	25	36	49	64	
	2	6	12	20	30	42	56	72

so ergeben sich die umgekehrten Proportionen (4:2, 9:6, etc.)

d.h. auch, daß in der Folge:
1.Quadratzahl, 1.longilateri, 2.Quadratzahl, oder
2.Quadratzahl, 2.longilateri, 3.Quadratzahl, etc.
die aufsteigende Proportionenfolge als Ausschnitt einer geometrischen Reihe entsteht:

1:2:4 duplex
4:6:9 sesquialter
9:12:16 sesquitertius
etc.
und für diese Zahlengruppen gilt dann selbstverständlich das, was für alle geometrischen Reihen gilt (siehe unten)

arithmetisches, geometrisches und harmonisches Mittel

es gilt: $a > b > c$

Das **arithmetische** Mittel b zweier Zahlen a und c ist:
$b = \frac{a+c}{2}$
Für arithmetische Folgen gilt, daß die Differenz benachbarter Glieder gleich bleibt:
$a - b = b - c$

Das **geometrische** Mittel b zweier Zahlen a und c ist:
$b = \sqrt{a \cdot c}$
Für geometrische Folgen gilt, daß der Quotient benachbarter Glieder gleich bleibt, die Proportionen zwischen den Gliedern also gleich bleiben:
$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ es gilt auch:
$a \cdot c = b^2$ und $a + 2b + c$ ergibt jeweils eine Quadratzahl

Das **harmonische** Mittel b zweier Zahlen a und c ist:
$b = \frac{2ac}{a+c}$
Eine harmonische Folge ist der reziproke Wert einer arithmetischen Folge, so ist:
1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{1}{6}$, etc. eine harmonische Folge, sowie auch:
3 : 4 : 6 (Quinte und Quarte die sich zur Oktave ergänzen), da:
$\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$ eine arithmetische Reihe ist, weil:
$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}$
allgemein gilt für harmonische Folgen:
a:c = (a-b):(b-c)

Lucas - Folgen

Alle Zahlenfolgen für die gilt, $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, bei denen also jedes Folgeglied die Summe der beiden vorangehenden ist, heißt Lucas-Folge. Eine spezielle Form der Lucas-Folge sind die

Fibonacci-Zahlen

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, etc
Die Folge der Quotienten der Fibonacci-Zahlen $\frac{f_{n+1}}{f_n}$ hat im **goldenen Schnitt** ihren Grenzwert:
1:1, 2:1, 3:2, 5:3, etc. also 1; 2; $1,5$; $1,\bar{6}$; $1,625$; etc.

Der goldene Schnitt (ϕ)

Eine Strecke der Länge a wird so geteilt, daß der größere Teil M sich zum kleineren Teil m verhält, wie die ganze Strecke a zur größeren M. Also:
$\frac{a}{M} = \frac{M}{m}$, dann ist $a \cdot m = M^2$ und dann gilt $\frac{M}{m} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$
dies ergibt die Konstante ϕ(Phi) und $\phi \approx 1,618$

Cornelius Schwehr